ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NITHSAVAD VONGSY

NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH KIỂU SCHRODINGER KIRCHHOFF CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE PHÂN THỨ TRÊN $\mathbb{R}^N$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NITHSAVAD VONGSY

NGHIỆM YẾU CỦA PHƯƠNG TRÌNH KIỂU SCHRODINGER KIRCHHOFF CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE PHÂN THỨ TRÊN $\mathbb{R}^N$

Ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học: **TS. Nguyễn Văn Thin**

THÁI NGUYÊN - 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2020
Người viết luận văn

Nithsavad VONGSY

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của TS. Nguyễn Văn Thìn. Thầy đã tận tình hướng dẫn, giải đáp những thắc mắc, giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Một lần nữa tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất đến thầy! Đồng thời, tôi xin gửi lời cảm ơn đến Ban Chủ Nhiệm khoa Toán và các thầy cô trong tổ Bộ môn Giải tích đã tạo điều kiện cho tôi được làm luận văn, đã quan tâm và đôn đốc tôi trong quá trình làm luận văn.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2020

Nithsavad VONGSY

Mục lục

Mở đầu **1**

1 Nghiệm yếu của phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ với đại lượng nhiễu **4**

1.1 Giới thiệu bài toán và một số kết quả bổ trợ 4

1.2 Sự tồn tại nghiệm yếu cho phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff không thuần nhất chứa toán tử p-Laplace phân thứ trong $\mathbb{R}^N$ 12

2 Nghiệm yếu của phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ, số mũ tới hạn và đại lượng Hardy **29**

2.1 Phương trình không suy biến kiểu Schrödinger-Kirchhoff dừng chứa toán tử p-Laplace phân thứ và đại lượng Hardy 29

2.2 Phương trình suy biến kiểu Schrödinger-Kirchhoff dừng chứa toán tử p-Laplace phân thứ và số mũ tới hạn 41

Kết luận **49**

Tài liệu tham khảo 50

Mở đầu

1. Lý do chọn luận văn

Trong thời gian gần đây, các nhà toán học dành sự quan tâm nghiên cứu các toán tử không địa phương loại elliptic và ứng dụng trong toán tối ưu, tài chính, cơ học lượng tử, khoa học vật liệu. Toán tử Laplace thứ là một dạng mở rộng của toán tử Laplace, được định nghĩa thông qua tích phân kỳ dị và cũng cung cấp một mô hình đơn giản để mô tả các quá trình Lévy trong lý thuyết xác suất. Một mở rộng của toán tử Laplace thứ là toán từ p-Laplave phân thứ.Với $s \in (0,1)$ và hàm $u \in L^n(\mathbb{R}^N), n > 2s$, khi đó toán tử Laplace thứ $(-\Delta)^s u$ được định nghĩa bởi

$$(-\Delta)^s u(x) = C(n,s) \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\varepsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} \, \mathrm{d}y),$$

trong đó $C(n,s) = \dfrac{1}{\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1-\cos\varsigma_1}{|\varsigma|^{n+2s}} \, \mathrm{d}\varsigma}$, $\varsigma = (\varsigma_1, \varsigma'), \varsigma' \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ngoài định nghĩa trên, toán tử Laplace thứ $(-\Delta)^s$còn được định nghĩa thông qua phép biến đổi Fourier [26], s- mở rộng điều hòa được giới thiệu bởi Caffarelli-Silvestre [12]. Các bài toán dạng Kirchhoff mô tả một số hiện tượng vật lý, cụ thể Kirchhoff nghiên cứu bài toán

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{p_0}{h} + \frac{E}{2L} \int\limits_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \mathrm{d}x \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (1.1)$$

một mở rộng phương truyền sóng D'Alambert, mô tả sự thay đổi độ dài của dây trong quá trình dao động, trong đó ρ, p_0, h, E, L là các hằng số.

Phương trình trên chứa đại lượng không địa phương $\dfrac{p_0}{h} + \dfrac{E}{2L} \displaystyle\int\limits_0^L \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 \mathrm{d}x$,

phụ thuộc vào trung bình $\int\limits_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x$ của động năng $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2$ trên $[0, L]$. Hơn nữa các bài toán dạng (1.1) được sử dụng trong nhiều mô hình và hệ sinh học, trong đó u được mô tả như một quá trình. Có nhiều bài toán kiểu Kirchhoff đã được nghiên cứu cho các lớp toán tử khác nhau. Có thể kể đến như

$$-\left(a + b\int\limits_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)\Delta u = h(x, u).$$

Thời gian gần đây, nhiều tác giả nghiên cứu [4, 3, 37] một mở rộng của bài toán trên cho phương trình kiểu Schrödinger trong $\mathbb{R}^N$:

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) \text{ trên } \mathbb{R}^N.$$

Một mở rộng của $(-\Delta)^s$ là toán tử p-Laplace phân thứ $(-\Delta)_p^s$ được định nghĩa (sai khác một hằng số) bởi

$$(-\Delta)_p^s u(x) = 2\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{n+ps}}\,\mathrm{d}y.$$

Hiện nay bài toán về sự tồn tại nghiệm của phương trình chứa các toán tử không địa phương loại elliptic (trong đó có toán tử Laplace phân thứ và p-Laplace phân thứ) thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trên thế giới: Pucci (Đại học Degli Studi di Perugia, Italy), Giovanni (Đại học Mediterranea' di Reggio Calabria, Italy), Repovš (Đại học Ljubljana, Slovenia), Servadei (Đại học Degli Studi di Urbino 'Carlo Bo', Italy), Radulescu (Viện Toán "Simion Stoilow"- Viện hàn lâm khoa học Romanian), Zhang (Đại học Heilongjiang, Trung Quốc), Ambrosio (Đại học DegliStudidiUrbino'Carlo Bo', Italy), Wei (Đại học British Columbia, Canada), Fazly (Đại học Alberta, Canada), Cabre (Đại học Politècnica de Catalunya, Tây Ban Nha), Tan (Đại học Técnica Federico Santa María, Chile), Barrios (Đại học Autónoma de Madrid, Tây Ban Nha),. . . .

Tiếp tục hướng nghiên cứu này, tôi sẽ nghiên cứu bài toán kiểu Schrödinger-Kirchhoff cho phương trình p-Laplace phân thứ trong $\mathbb{R}^N$ có dạng:

$$M\left(\iint\limits_{R^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)(-\Delta)_p^s u = \lambda w(x)|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{p_s^*-2}u.$$

Khi M không suy biến, tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán chứa số hạng kỳ dị Hardy sau đây trong $\mathbb{R}^N$:

$$M\left(\iint\limits_{R^{2n}} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+ps}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)(-\Delta)_p^s u - \gamma\frac{|u|^{p-2}u}{|x|^{ps}}$$
$$= \lambda w(x)|u|^{q-2}u + K(x)|u|^{p_s^*-2}u.$$

2. Phương pháp nghiên cứu

Đề tài sử dụng nghiên cứu cơ bản, sưu tầm và đọc tài liệu từ các tạp chí toán học trong nước và quốc tế liên quan đến toán tử Laplace thứ. Qua đó, tìm hiểu và nghiên cứu các vấn đề trong luận văn.

3. Mục đích của luận văn

Mục đích của luận văn là nghiên cứu nghiệm yếu của một số lớp phương trình Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ.

4. Nội dung của luận văn

Luận văn gồm 2 chương:

- Chương 1. Nghiệm yếu của phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ với đại lượng nhiễu.

- Chương 2. Nghiệm yếu của phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ, số mũ tới hạn và đại lượng Hardy.

Chương 1

Nghiệm yếu của phương trình kiểu Schrödinger-Kirchhoff chứa toán tử p-Laplace phân thứ với đại lượng nhiễu

1.1 Giới thiệu bài toán và một số kết quả bổ trợ

Trong chương này chúng ta nghiên cứu phương trình p-Laplace phân thứ kiểu Schrödinger-Kirchhoff như sau

$$M\left([u]_{s,p}^{p}\right)(-\Delta)_{p}^{s}u+V(x)\left|u\right|^{p-2}u=f(x,u)+g(x)\text{ trong }\mathbb{R}^{N}, \tag{1.1}$$

$$[u]_{s,p}^{p}:=\iint_{R^{2N}}\frac{\left|u(x)-u(y)\right|^{p-2}}{\left|x-y\right|^{N+ps}}\mathrm{d}xdy, \tag{1.2}$$

trong đó, $0<s<1<p<\infty$ với $ps<N$, $(-\Delta)_{p}^{s}$ là toán tử p-Laplace phân thứ có thể được định nghĩa dọc theo hàm $\varphi\in C_{0}^{\infty}(\mathbb{R}^{N})$ là

$$(-\Delta)_{p}^{s}\varphi(x)=2\lim_{\varepsilon\to0^{+}}\int_{\mathbb{R}^{N}\setminus B_{\varepsilon}(x)}\frac{\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|^{p-2}(\varphi(x)-\varphi(y))}{\left|x-y\right|^{N+ps}}dy$$

với $x\in\mathbb{R}^{N}$, trong đó $B_{\varepsilon}(x):=\{y\in\mathbb{R}^{N}:\left|x-y\right|<\varepsilon$, xem [20, 23] và các tài liệu tham khảo trong đó để biết thêm chi tiết về toán tử p-Laplace phân thứ. Hàm $g=g(x)$ có thể được xem như một số hạng nhiễu loạn.

Khi $p=2$ và $M\equiv1$ thì phương trình (1.1) trở thành phương trình

Laplace phân thứ

$$(-\Delta)^s u + V(x)u = f(x,u) + g(x) \text{ trong } \mathbb{R}^N,$$

có thể coi là dạng phân thứ của phương trình Schrödinger dừng cổ điển sau đây

$$-\Delta u + V(x)u = f(x,u) + g(x) \text{ trong } \mathbb{R}^N.$$

Trong những năm gần đây, các phương trình Kirchhoff thuộc kiểu

$$-\left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)\Delta u = h(x,u) \text{ trong } \Omega, \tag{1.3}$$

trong đó $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền trơn nhẵn, $a > 0, b \geqslant 0$ và u thỏa mãn một số điều kiện biên nhận được sự quan tâm lớn. Bài toán (1.3) liên quan đến sự tương tự dừng của phương trình Kirchhoff

$$u_{tt} - \left(a + b\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)\Delta u = h(x,u), \tag{1.4}$$

được đề xuất bởi Kirchhoff trong năm 1883 như là một mở rộng của phương trình truyền sóng D'Alembert nổi tiếng

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t} - \left(\frac{p_0}{\lambda} + \frac{E}{2L}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = h(x,u).$$

Mô hình Kirchhoff có tính đến những thay đổi độ dài của dây được tạo ra bởi các dao động ngang. Ở đây, L là độ dài của dây, h là diện tích của tiết diện ngang, E là môđun Young của vật liệu, ρ là khối lượng riêng và p_0 là pha ban đầu. Trong [2], đã chỉ ra bài toán (1.4) trong một vài mô hình vật lý, trong đó u mô tả một quá trình phụ thuộc vào mức trung bình của chính nó. Bài toán không địa phương cũng tìm thấy sự ứng dụng của nó trong các hệ thống sinh học. Một ứng dụng khác của bài toán (1.3) có thể được sử dụng để mô tả sự tăng trưởng và di chuyển của một loài cụ thể. Chuyển động được mô hình hóa bằng số hạng tích phân, được giả định là phụ thuộc năng lượng của toàn bộ hệ thống với u là mật độ tập hợp của nó. Ngoài ra, sự chuyển động của một loài cụ thể có thể phải chịu ảnh hưởng của mật độ dân số trong miền, dẫn đến các phương trình của kiểu $u_t - \psi(\int_\Omega u\mathrm{d}x)\Delta u = h(x,u)$.